CONSIDERAȚII METODICE PRIVIND PREDAREA GEOMETRIEI CERCULUI ÎN ȘCOALĂ

Aspecte metodice privind predarea geometriei cercului în gimnaziu și liceu

Necesitățile aferente distribuției materiei, fac ca programa să așeze primele cunoștințe despre cerc (definiție, construcție, elemente, poziții relative) în geometria clasei a VI-a; geometria clasei a VII-a continuă studiul cercului în următoarea ordine: determinarea cercului, elementele cercului, pozițiile unei drepte față de cerc, unghi la centru înscris în cerc, patrulater inscriptibil și încheie studiul cercului în geometria clasei a IX-a astfel: definiții, coarde, arce, unghi la centru, unghi înscris, poligoane înscrise și circumscrise, probleme de loc geometric, poziția relativă a două cercuri, puterea punctului față de cerc, lungimea și aria cercului.

După ce în clasa a VI-a elevii au învățat definiția cercului și construcția lui cu ajutorul compasului, în clasa a VII-a completează cunoștințele referitoare la cerc, iar în clasa a IX-a le consolidează.

Ei au studiat deja bisectoarea unui unghi și mediatoarea unui segment ca locuri geometrice, au însușită această noțiune de loc geometric, deci o putem utiliza în definirea cercului. Îi vom determina pe elevi să înțeleagă că orice punct al cercului are proprietatea că se află la distanța dată r de O se află pe cercul dat. În plan nu mai există alte puncte decât cele de pe cercul desenat, care să fie la distanța r față de O.

În acest capitol avem două serii de teoreme: teoreme simple, ușor de intuit, de demonstrat, cum sunt cele referitoare la coarde și arce, diametrul perpendicular pe o coardă, congruența coardelor și a distanțelor de la centrul cercului la acestea, poziția dreptei față de cerc, teoreme mai greu de înțeles și intuit în formă generală și completă cum sunt cele referitoare la unghi înscris în cerc, patrulatere inscriptibile. Avem în plus și o problemă nouă, aceea a determinării cercului. Enunțul de a construi un cerc este legat în mintea copilului, prin toată experiența lui anterioară, de ideea: am centrul și raza. Pentru prima dată îi cerem să construiască un cerc, fără a-i da centrul și raza, urmând ca el să le găsească în condițiile date. Urmărim ca elevul să înțeleagă că această condiție “să treacă prin trei puncte date” determină în mod unic cercul. Această idee nu este înțeleasă bine , decât în confruntare cu contrara ei, cerc nedeterminat.

Începem deci cu problema: Se dă un punct A. Să se deseneze un cerc care trece prin A. După ce înlăturăm unele nelămuriri în legătură cu ce înseamnă „a trece prin A” (unii elevi înțeleg să-l ia pe A centru), scoatem în evidență faptul că putem construi “multe” cercuri trecând prin A, centrele acestor cercuri fiind oriunde în plan.

Punem acum problema de a construi un cerc care să treacă prin două puncte distincte A și B. Ghidați de cazul precedent, luând centrul la întâmplare, observăm că cercul poate trece prin A, dar nu prin B, ceea ce înseamnă că centrul trebuie luat în așa fel încât [OA]=[OB]. Unde sunt punctele care îndeplinesc această condiție? Pe mediatoarea segmentului [AB]. Îi îndrumăm pe elevi să observe că putem construi oricâte cercuri vrem care să treacă prin cele două puncte, cu condiția ca centrul lor să fie pe mediatoarea segmentului [AB].

Trecem la al treilea caz, când se dau trei puncte necoliniare. Este primul contact al elevului cu metoda intersecției locurilor geometrice. Știm că, pentru ca cercul să treacă prin punctele A și B, centrul trebuie să fie pe mediatoarea segmentului AB, dar nu în orice punct al acesteia, deoarece s-ar putea ca cercul să nu treacă prin C. Dacă vrem ca cercul sa treacă prin B și C, centrul cercului se va găsi pe mediatoarea segmentului BC, dar nu în orice punct al acestuia, deoarece s-ar putea ca cercul să nu treacă si prin A. Elevii pot deduce acum că centrul cercului căutat este la intersecția celor două mediatoare, fiind punct egal depărtat de A și B, găsindu-se pe prima mediatoare și de B și C, găsindu-se pe a doua mediatoare. Mediatoarele fiind unice, punctul O (intersecția mediatoarelor), este unic determinat. Deci, există un singur cerc care să treacă prin punctele A, B și C. Cele afirmate pot constitui o justificare intuitivă, accesibilă pentru existența și unicitatea cercului cu trei puncte date. Nu este o demonstrație riguroasă deoarece nu răspunde întrebării: "Cine ne asigură că cele două mediatoare se intersectează într-un punct".

Deci o demonstrație riguroasă a problemei: "trei puncte necoliniare date determină un cerc și numai unul" (și este bine să-i obișnuim pe elevi cu astfel de formulări pentru a-i pregăti pentru studiul geometriei din clasa a IX-a) se poate face cu elevii care au un nivel mai ridicat de pregătire, în cadrul cercului de matematică. Putem da apoi ca temă elevilor să construiască cercul ce trece prin vârfurile triunghiului ABC, alegând cazuri când unghiul A al triunghiului are diferite măsuri: 60°, 90°, 120°, 150°, dându-le chiar denumirea cercului, aceea de cerc circumscris triunghiului, analizăm cazul cercului circumscris triunghiului dreptunghic.

Referitor la măsura unghiurilor și a arcelor , se impun câteva probleme importante:

-să explicăm de ce spunem măsura unghiului la centru = măsura arcului cuprins și nu spunem unghiul = arcul cuprins.

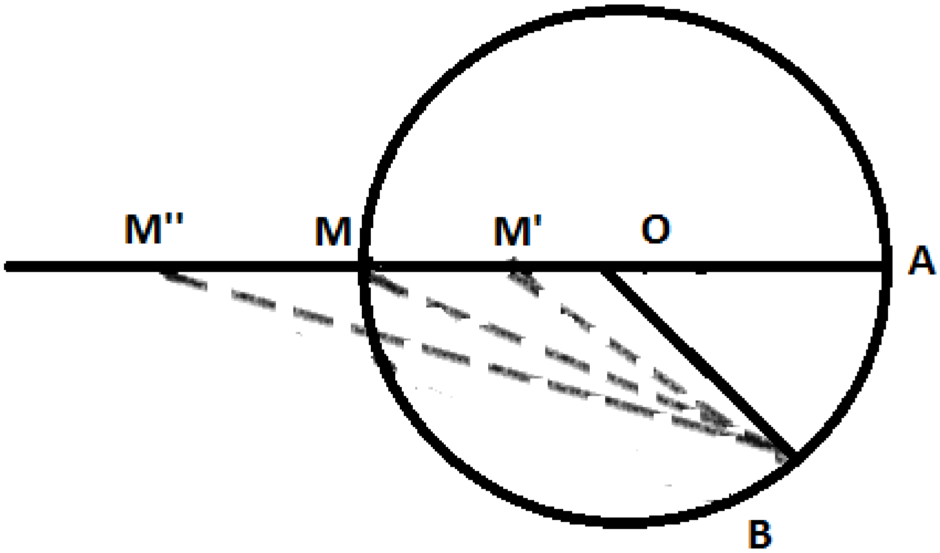
-să explicăm de ce două arce din cercuri necongruente pot avea același număr de grade, deși au lungimi diferite.

În această etapă, elevul nu are bine fixată noțiunea de egalitate în geometrie (suprapunere de figuri) cuvântul egal îi evocă în minte numere egale. Îl vom lămuri că unghiul și arcul sunt figuri, și figuri egale în geometrie sun cele care coincid.

La predarea temei: "Pozițiile unei drepte față de un cerc" vom arăta mai întâi că o dreaptă nu poate avea mai mult de două puncte distincte comune cu un cerc, respectiv drepte care au un singur punct comun cercului, numind de fiecare dată poziția dreptei față de cerc și scriind relația care există în fiecare caz între raza cercului și distanța de la centrul cercului la dreaptă.

Ținând cont că enunțul teoremei unghiului înscris este greu de înțeles: „măsura unghiului este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins" (sunt termeni care trebuie explicați, interpretați), este bine să nu începem cu enunțul ci cu unele considerații intuitive care să ne așeze pe linia înțelegerii enunțului și a descoperirii demonstrației.

Fig. 6.1.

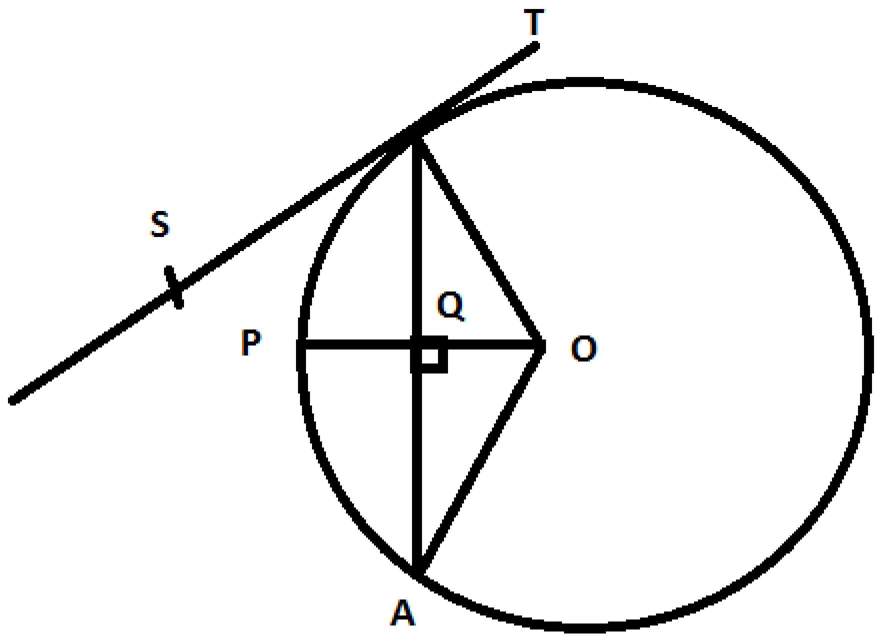


După ce actualizăm mai întâi unele noțiuni ca: măsura unghiului la centru, unghi exterior unui triunghi și faptul că unghiul exterior de la vârful triunghiului isoscel are măsura egală cu dublul măsurii unghiului de la bază, desenăm un cerc, un unghi la centru ΔAOB, stabilim măsura lui, apoi punem problema: ne închipuim că vârful O al unghiului se mută într-un punct M de pe diametru OA pe semidreapta opusă semidreptei [OA. Ce se întâmplă cu măsura unghiului AMB când M se deplasează pe semidreapta considerată? Analizăm cazul când M este pe cerc și îi vom deduce măsura cu ajutorul unghiului AOB exterior triunghiului isoscel MOB. Folosind definiția, ei pot deduce că, în acest caz, unghiul AMB este înscris în cerc și îi vor deduce măsura (fig.6.1.). Se desenează figura cu centrul în interiorul unghiului cu centrul în exteriorul unghiului, se deduce în fiecare caz măsura unghiului, apoi se formulează enunțul teoremei unghiului înscris.

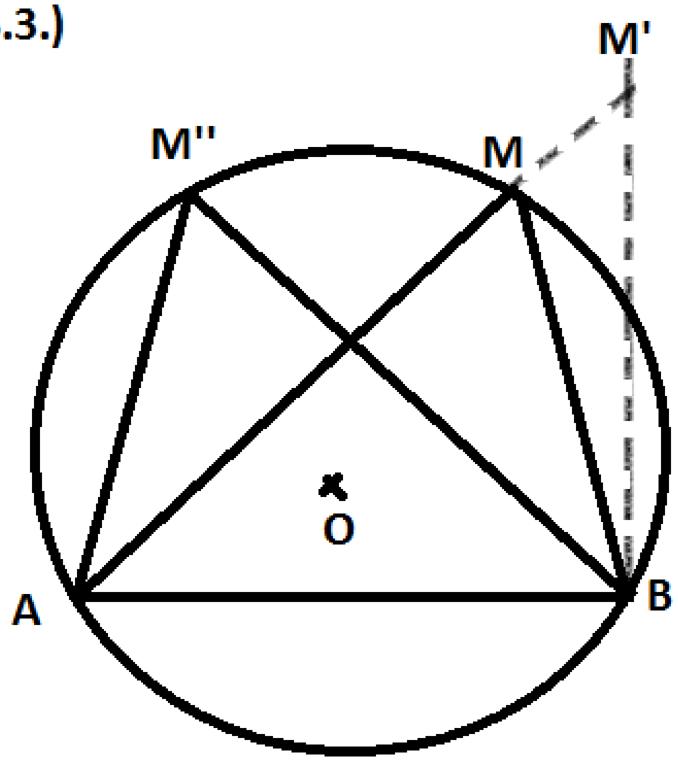
Pentru fiecare vom sublinia etapele demonstrației și faptul că un caz particular servește descoperirii unei proprietăți generale și demonstrării ei. Această temă se poate preda și astfel:

-se demonstrează teorema referitoare la măsura unui unghi cu vârful pe cerc, care are una din laturi secantă și cealaltă tangentă, măsura unghiului respectiv este egală cu jumătate din măsura arcului subîntins de coardă. Într-adevăr avem: m(STA)= 90°- m(ATO)= m(TOP)= 1/2M(AT) unde OP ⊥ TA (se actualizează mai întâi definiția tangentei, a proprietății de a fi perpendiculară pe rază în punctul de contact, a diametrului perpendicular pe o coardă, a măsurii unghiului la centru, a unghiurilor complementare. Folosindu-se această teoremă se poate deduce apoi teorema unghiului înscris în cerc.

Fig.6.2.



(Fig.6.3.)



Dacă nivelul de pregătire al clasei permite, este bine să se dea ambele metode de deducere a măsurii unghiului înscris, dacă nu în cadrul aceleași ore, în cadrul cercului cu elevii clasei, sau să se propună a doua metodă ca temă. Bineînțeles, că se vor da apoi aplicații simple în care se cere să se calculeze unghiul când se dă arcul, sau arcul când se dă unghiul (măsurile lor), apoi aplicații mai dificile din manual sau culegeri.

Pentru a face accesibilă, unui număr cât mai mare de elevi, teorema arcului capabil de un unghi dat, vom proceda astfel

-desenăm pe tablă (Fig.6.3.) cercul, punctele fixe A și B și punctul M mobil pe arcul mare AB. Arătăm cu degetul mișcarea punctului M pe arcul considerat, oprindu-ne în anumite poziții și constatând că măsura unghiului AMB este aceeași (=1/2 m(AB). Dacă însă M iese în afară (ca M' pe figură), unghiul se micșorează, dacă intră în interiorul cercului, unghiul se mărește. Deci toate unghiurile M care au aceeași măsură și laturile ce trec prin punctele fixe A și B se găsesc pe arcul mare și numai pe acesta, sau pe unul simetric cu acesta față de AB, situat în semiplanul opus. Vom spune că acest arc se numește arc capabil de măsura unghiului M. O demonstrație mai riguroasă (ca cea din lucrare) o putem face cu elevii dotați în orele de cerc.

O primă observație, după predarea teoremelor referitoare la patrulatere inscriptibile, este că pătratul, dreptunghiul și trapezul isoscel sunt patrulatere inscriptibile. O altă observație utilă în rezolvări de probleme este aceea că un unghi interior al unui patrulater inscriptibil este congruent cu unghiul exterior al unghiului opus (sunt congruente deoarece au același suplement).

Proprietățile patrulaterului inscriptibil se consolidează printr-un volum de aplicații bine dozat (ca număr și dificultate gradată), punându-se accent pe cele privind linii și puncte importante în triunghi. Selecționarea problemelor propuse pentru considerarea temei se face și în funcție de nivelul clasei, în așa fel ca după parcurgerea temei și elevul de notă minimă de promovare să rămână cu convingerea că, fiind dat un patrulater convex, cercul determinat de oricare trei dintre vârfurile sale nu trec totdeauna și prin al patrulea și că, atunci când trece, spunem că patrulaterul este inscriptibil, iar când nu trece, spunem că nu este inscriptibil.

După acest criteriu al inscriptibilității, elevul rămâne cu convingerea că mulțimea tuturor patrulaterelor se împarte în două submulțimi disjuncte, cea a patrulaterelor inscriptibile și cea a patrulaterelor neinscriptibile, că fiind dat un cerc, întotdeauna în el putem înscrie un patrulater convex, reciproc însă, fiind dat un patrulater convex, nu există întotdeauna un cerc care să treacă prin toate cele patru vârfuri ale sale. În ceea ce privește demonstrarea teoremelor și problemelor din geometria cercului, trebuie să facem în așa fel încât

-elevul să ajungă la convingerea că nu poate să culeagă roadele studiilor sale matematice fără eforturi deosebite, că nu este suficient numai să înțeleagă raționamentele ce-i sunt expuse, și să construiască singur, pe baza lor, raționamente noi

-să observe corect care este ipoteza și care este concluzia unei teoreme pe care vrea să o demonstreze

-să înțeleagă că a demonstrat o teoremă, înseamnă a trece prin raționament, de la ipoteză la concluzie, că trebuie dedusă concluzia din ipoteză

-să știe că în orice demonstrație se arată că concluzia are loc, în presupunerea că ipoteza este adevărată.

O importanță deosebită o acordăm definirii termenilor folosiți sau reactualizării definirii termenilor folosiți, deoarece nu se pot efectua raționamente asupra unor noțiuni care nu au fost definite.

Definiția aceluiași termen poate adeseori să ia mai multe forme, dintre care trebuie să o alegem pe cea mai indicată pentru scopul urmărit. Astfel, putem defini bisectoarea [AM a unghiului ca semidreaptă cu originea în A (vârful unghiului), care face cu una din laturi, în sensul care convine problemei, un unghi cu măsura egală cu jumătate din măsura celui inițial.

Anumite teoreme ne îngăduie să înlocuim o definiție printr-o alta echivalentă cu ea. Astfel, în locul definiției patrulaterului inscriptibil de a avea vârfurile conciclice putem folosi una din proprietățile inscriptibile de a avea unghiurile opuse suplementare sau un unghi din interior să aibă aceeași măsură cu un unghi exterior celui opus. Experiența la catedră arată că, un număr mare de construcții auxiliare nu sunt arbitrare, ci o consecință directă a acestei reguli… Astfel, dacă vrem să arătăm că un punct M este pe cerc, îl unim cu centru și arătăm că OM=r, conform definiției cercului. De multe ori însă, această construcție nu ajută, ci alta, în care M se unește cu trei puncte distincte A,B,C ale cercului și se arată apoi că patrulaterul ABCM este inscriptibil.

Un alt aspect de care trebuie să ținem cont în demonstrațiile problemelor și teoremelor este acela de a transforma datele ipotezei, în așa fel încât să punem în evidență concluzia, sau să înlocuim concluzia inițială cu alta, care o implică pe cea dată, și care se deduce mai ușor din ipoteză. De exemplu□ dreapta lui Simson. Dacă dintr-un punct M situat pe cercul circumscris triunghiului ABC coborâm perpendicularele MP, MQ, MR pe cele trei laturi, picioarele acestor trei laturi sunt coliniare. În locul concluziei□ picioarele perpendicularelor sunt coliniare, folosim concluzia□ $\Delta BPR \equiv \Delta CPQ$, unde P= $pr_M BC$, R= $pr_M BA$, Q= $pr_M AC$. Congruența se arată ușor folosind patrulaterele inscriptibile care apar, iar concluzia inițială reiese din faptul că cele două unghiuri sunt opuse la vârf. (teorema este demonstrată în cadrul lucrării).

O atenție deosebită o acordăm formulării reciprocelor unor propoziții și demonstrării adevărului exprimat de ele, de multe ori prin reducere la absurd, metodă de demonstrare care constă în a arăta că, presupunând ipoteza adevărată și totodată concluzia falsă, ajungem la o contradicție, așa cum este demonstrată în lucrare la capitolul „Teoreme și probleme clasice de geometrie”, reciproca primei teoreme a lui Ptolemeu.

Stabilirea proprietăților geometrice se face folosind o anumită figură. Raționamentul se face folosind îndeaproape figura, dar judecățile se exprimă cu ajutorul literelor puse ca notații pe figură. Deși judecățile se fac pe o anumită figură, concluzia este generală, valabilă pentru toate figurile din categoria respectivă.

Pentru a rezolva probleme de construcții, o primă condiție este ca toți elevii să aibă riglă și compas, apoi să posede noțiunile învățate până la cerc inclusiv, să aibă deprinderi formate de a construi mediatoarea unui segment, bisectoarea unui unghi, să cunoască proprietățile punctelor de pe bisectoare, respectiv mediatoare. Să știe să construiască cercul când se dă centrul și raza, să ridice o perpendiculară dintr-un punct al unei drepte, să coboare o perpendiculară dintr-un punct pe o dreaptă. Când au de rezolvat probleme de construcții geometrice, elevii au tendința de a deduce rezolvarea lor numai la efectuarea desenului. De aceea, îi vom obișnui să exprime în scris, etapele în care au efectuat construcția, în ce condiții au dus anumite linii, sau au liniat anumite puncte. Vom preciza elevilor, încă de la început, că la orice construcție geometrică putem considera problema rezolvată, și vom analiza proprietățile figurii, proprietăți ce permit o înlănțuire de construcții până la obținerea rezultatului. Fiecare pas făcut în construcția figurii trebuie justificat. Se fac precizări la numărul soluțiilor sau în ce cazuri avem soluții.

Rezolvarea problemelor de loc geometric se bazează pe cunoașterea unor locuri geometrice uzuale, ca bisectoarea unui unghi, mediatoarea unui segment, arcul capabil de un unghi dat.

În general, ca o anumită figură să reprezinte locul geometric al punctelor M care au proprietatea P, trebuie demonstrate două propoziții

1. Orice punct care are proprietatea P, aparține figurii F.
2. Orice punct al figurii F are proprietatea P

Dacă am demonstra numai prima propoziție, am ajunge la concluzia că toate punctele locului căutat aparțin figurii F, dar n-am putea preciza că pe figura F nu se găsesc și puncte care să nu aibă proprietatea P. Dacă am demonstra numai a doua propoziție, am ajunge la concluzia că toate punctele figurii F aparțin locului căutat, dar n-am preciza că mai sunt totuși puncte în afara figurii F, care aparțin locului geometric.

În cele mai multe cazuri, problemele de loc geometric se reduc la probleme tipice de loc geometric, deja studiate, greutatea constă în a le recunoaște. Caracteristic geometriei este faptul că, în principiu, toate adevărurile ei pot fi descoperite prin propria gândire.

Sarcina principală a predării geometriei este să pună elevii, după ce li se dă un număr minim de definiții – în prezența problemelor, să-i deschidă gustul, îndemnându-i să descopere teoreme și aplicații, să-i sprijine, să-i călăuzească, atât cât este necesar în această activitate vie și proprie de descoperire. Tensiunea căutării, emoția aflării, constituie fenomenul psihic fundamental al copilului în fața geometriei.

Prof. Mariana GĂLĂȚEANU

Liceul Teoretic ”Constantin Brătescu” Isaccea