Matematica de plăcere

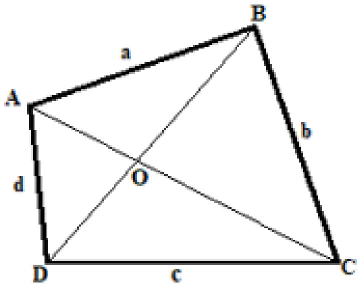
Profesorul trebuie să stimuleze iniţiativa, spiritul întreprinzător şi studiul individual al elevului, în vederea obţinerii unui coeficient crescut al progresului şcolar.

Dacă bogăţia de informaţii ce trebuie transmisă elevilor într-un timp relativ scurt duce la întâmpinarea unor dificultăţi în înţelegerea unor concepte de către elevi, mi-am propus să elimin din aceste neajunsuri şi să contribui la îmbunătăţirea imaginii acestui obiect în ochii elevului dedicat studiului printr-un exemplu de aplicație care poate determina elevii să demonstreze, adică să fundamenteze logic deductiv unele propoziţii pornind de la altele despre care ştiu că sunt adevărate așa că în inegalitatea de mai jos dintre aria unui patrulater convex și lungimile laturilor sale voi utiliza demonstrația făcută în publicația anterioară:

Fie ABCD un patrulater convex de laturi consecutive a, b, c, d și aria S.

Să se arate că: $\boldsymbol{S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}}$

***Soluția 1*.**



În figura alăturată avem : $S_{ABC} \leq \frac{a \cdot b}{2}$; $S_{BCD} \leq \frac{b \cdot c}{2}$;

$S_{CDA} \leq \frac{c \cdot d}{2}$; $S_{DAB} \leq \frac{d \cdot a}{2}$

Dar $S_{ABC} = S_{ABO} + S_{OBC}$;

$S_{BCD} = S_{BCO} + S_{OCD}$; $S_{CDA} = S_{COD} + S_{DOA}$; $S_{DAB} = S_{DOA} + S_{ABO}$.

Deci $S = \frac{1}{2}(\mathrm{S_{ABC}} + S_{\mathrm{BCD}} + S_{\mathrm{CDA}} + S_{\mathrm{DAB}}) \leq \frac{1}{4}(ab + bc + cd + da) = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$

de unde obținem relația cerută de problemă.

Soluția 2.

Fie M și N mijloacele laturilor AB respectiv DC. În figura de mai jos ducând perpendicularele din D, C și N obținem:

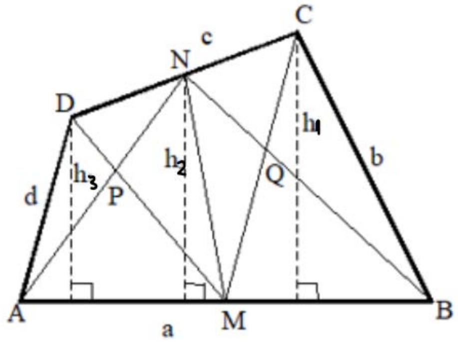
$S_{ANB} = \frac{AB \cdot h_2}{2}$; $S_{ADM} = \frac{AM \cdot h_3}{2}$; $S_{CMB} = \frac{MB \cdot h_1}{2}$ dar $h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}$ iar AM = MB, și DN = NC

$$S_{ADM} + S_{CMB} = \frac{AM \cdot h_3 + MB \cdot h_1}{2} = \frac{AM \cdot (h_1 + h_3)}{2} = \frac{AM \cdot 2h_2}{2} = \frac{AB \cdot h_2}{2}$$

Deci $S_{ABN} = S_{ADM} + S_{CMB}$. Asemănător deducem : $S_{DMC} = S_{ADN} + S_{NBC}$.

Atunci $S_{ABCD} = S_{ADN} + S_{ANB} + S_{NBC} = S_{ANB} + S_{DMC}$

Dar $S_{ANB} \leq \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{a}{2} \cdot MN$



Dacă triunghiul ABN este echilateral sau isoscel cu AN = BN atunci MN este înălțime și $S_{ANB} = \frac{a}{2} \cdot MN$. Dar triunghiul ABN este oarecare, atunci, fie $N\hat{A}B > N\hat{B}A$ sau $N\hat{A}B < N\hat{B}A$. În ambele cazuri mediana este mai mare decât înălțimea şi din acest motiv avem $S_{ANB} \leq \frac{a}{2} \cdot MN$.

Asemănător $S_{DMC} \leq \frac{c}{2} \cdot MN$, sau $S_{ANB} + S_{DMC} \leq \frac{a+c}{2} \cdot MN$ (1)

Din inegalitatea demonstrată în publicația anterioară avem $MN \leq \frac{b+d}{2}$.

Înlocuim în relația (1) și obținem : $S_{ABCD} \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$

Prof. CARACOSTEA VIOREL

Școala Gimnazială ”Alexandru Ciucurencu”