

Geometriile neeuclidiene și impactul lor asupra vieții, științei și artei

Trăim un timp care se scrie cu o viteză uimitoare. Ce este astăzi nou în domeniul cercetării științifice, mâine va fi istorie. Tinerii folosesc acum smartphone-uri, tablete, LCD-uri, sisteme de operare android, facebook, wikispaces și multe altele, și atunci mă întreb, în acest context cultural și informațional, care mai este locul pe care îl ocupă geometriile neeuclidiene? Deși se studiază numai în facultățile de profil, geometriile neeuclidiene ar putea fi incluse în programa de liceu datorită multitudinii de aplicații ale acestora și diversității ideilor care ar prinde contur în mintea tinerilor liceeni pasionați de matematică.

Să pornim atunci într-o incursiune în istoria matematicii. Cum s-a născut această nouă ramură a geometriei?

Totul a pornit de la eșecul de a demonstra postulatul al V-lea din tratatul lui Euclid, *Elementele*, folosind axiomele pe care geometrii le aveau la îndemână. A cincea axiomă care mai poartă numele de *Postulatul dreptelor paralele* este mai greoaie decât celelalte axiome și are următorul enunț: „Dacă două drepte aflate într-un plan intersectează o a treia dreaptă astfel încât suma celor două unghiuri interne de pe o parte a lor e mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se vor intersecta inevitabil dacă sunt prelungite suficient în acea parte”. Consecințele absurde la care au ajuns preotul iezuit Girolamo Saccheri (1667-1733) și Johann H. Lambert (1728-1777) în încercarea lor de a demonstra axioma, reprezintă de fapt noile teoreme ale geometriei neeuclidiene și atunci putem afirma că aceștia doi ar fi părinții de drept ai acestei geometrii. Prin urmare, s-a ajuns la concluzia că acest postulat este independent de celelalte postulate și atunci se poate construi un nou sistem consistent de propoziții geometrice referitoare la puncte, drepte, etc., deduse dintr-un sistem de axiome în care acest postulat să fie înlocuit cu negația lui.

Timp de aproape 2000 de ani, geometria lui Euclid (circa 300 î.e.n.) a reușit să dea răspuns la orice întrebare legată de spațiul înconjurător, iar Baruch Spinoza (1632-1677) în tratatul său „*Etica demonstrată după metoda geometrică*” a folosit raționamentul geometric în încercarea de a uni știința cu religia și etica. Filozofii acelor vremuri susțineau ideea că geometria euclidiană este „infașibilă și reprezintă singura descriere exactă a spațiului fizic” (I. Kant), însă ea a fost combătută în anul 1823 când tânărul ofițer genist din garnizoana orașului Timișoara, János Bolyai (1802-1860) i-a scris tatălui său: „...Am găsit lucruri atât de minunate încât am încremenit.[...]”

Din nimic am creat o lume nouă și diferită.” Era vorba despre descoperirea teoremelor ce vor forma mai târziu cadrul teoretic al geometriilor neeuclidiene.

Independent de studiul lui Bolyai, Nicolai Ivanovici Lobacevski (1793-1856) a publicat un tratat în care erau prezentate idei proprii cu privire la o nouă geometrie ce poate fi construită pe suprafața unei șei, și anume geometria hiperbolică. În această geometrie, postulatul al V-lea este înlocuit cu următorul enunț: „Date fiind o dreaptă aflată într-un plan și un punct exterior drepteii, există cel puțin două drepte care trec prin acel punct și sunt paralele cu dreapta dată.” Reprezentativ pentru acest tip de geometrie este că suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât 180° , și existența a cel puțin două paralele pentru o dreaptă dată.

Pe de altă parte, în anul 1854, matematicianul Bernhard Riemann (1826-1866), discipolul lui Carl Friederich Gauss (1777-1855), a susținut o lucrare la Göttingen numită "Despre ipotezele ce stau la baza geometriei" care avea ca temelie geometria eliptică de tipul celei întâlnite pe suprafața unei sfere. El a introdus aceste geometrii în spații curbe cu trei, patru și chiar mai multe dimensiuni. Noțiunea fundamentală rămâne însă cea de **curbură**, adică ritmul în care se curbează o curbă sau o suprafață. De exemplu, suprafața unui ou se curbează mai lent la mijloc decât la capete. În această geometrie eliptică unghiurile se măsoară ca în geometria euclidiană, nu există drepte paralele, iar acele curbe de lungime minimă între două puncte se numesc **geodezice**.

Iată ce scrie Mario Livio ca aplicație pentru geometria eliptică: “se observă că în această geometrie cea mai scurtă distanță dintre două puncte nu este o linie dreaptă, ci arcul unui cerc mare al cărui centru coincide cu centrul sferei. Liniile aeriene se folosesc de acest lucru – zborurile din Statele Unite către Europa nu urmează, ceea ce pare a fi pe hartă, o linie dreaptă, ci un cerc mare orientat inițial spre nord. Este ușor de verificat că oricare două cercuri mari se intersectează în două puncte diametral opuse. De exemplu, două meridiane, care la Ecuator par a fi paralele, se intersectează la cei doi poli.”¹ Mai poate fi considerată, ca o aplicație la viața reală, - “descrierea lumii unui navigator, deoarece arcele de cercuri mari sunt curbele de lungime minimă între două puncte de pe sferă.”²

Pentru fizică, descoperirea geometriei riemanniene a fost un pas înainte în înțelegerea teoriei generale a relativității a lui Einstein, unde lumina se propagă în lungul geodezicelor, iar curbura spațiului este determinată de natura materiei pe care o conține.³

¹ Mario Livio, *Este Dumnezeu matematician?*, București, Editura Humanitas, 2012, pag. 179

² Courant R., Robbins H., *Ce este matematica?*, București, Editura Științifică, 1969, pag. 242

³ Courant R., Robbins H., *Ce este matematica?*, București, Editura Științifică, 1969, pag. 242

Un alt domeniu care avea să fie marcat de descoperirea geometriilor neeuclidiene este și literatura, prin scriitorul Feodor Mihailovici Dostoievski (1821-1881) cu romanul ” *Frații Karamazov*”” (ultimul roman al scriitorului rus scris între anii 1878 și 1880). Aici Ivan, unul dintre personajele cărții, îi declară lui Alioșa că, dacă există un Dumnezeu și El a creat lumea, atunci a creat-o conform geometriei lui Euclid. Dostoievski însuși avea cunoștințe despre geometriile neeuclidiene și prin personajele sale afirmă că acele minți care pot vedea lumea în spațiu tridimensional sunt incapabile să se decidă asupra existenței lui Dumnezeu.

Poetul român Nichita Stănescu în volumul *Laus Ptolemaei* (1968) începe poezia *Certarea lui Euclid* cu postulatul „Nici un lucru nu poate să ocupe același spațiu în același timp cu un alt lucru” adăugând ironic că acesta este “fals citat din Euclid”. Citind poezia intri parcă în lumi paralele, “simultane” unde se întâmplă lucruri diferite: “Trec strada. /În lumea simultană se dărîmă un zid/ În lumea simultană, alta, tocmai se cucerește/ turnul de la Malta/ și-n cealaltă lume simultană/ tocmai explodează o bombă./ Și încă-n lumea cealaltă/ a celeilalte,/ oceanul/ e liniștit și fără vânt,/ încât atuncea când trec strada/ și calc cu talpa mea pe lucruri,/ în lumea simultană cealaltă,/ ca și Isus mă plimb pe ape.” Se observă o nevoie acută de libertate, de mișcare în spații cu mai multe dimensiuni care amintesc de geometriile neeuclidiene. Nichita Stănescu îl “ceartă astfel pe geometru pentru ideile sale geniale în conceperea geometriei: “Euclid, bătrâne și neomenescule,/ tu ai crezut într-o lume singură,/ cu postulate neomenestești ”.

Solomon Marcus vorbește în cărțile sale despre „spațiul care este prin excelență cadrul cel mai familiar al percepției intuitive, dar și manifestarea majoră a conflictului dintre intuiție și cunoașterea științifică sau artistică. Competiția dintre euclidian și non-euclidian, dar și colaborarea lor, marchează structura spațiului vizual și întreaga dezvoltare a științei, artei și literaturii din ultimii 150 de ani. De la atracția celei de a patra dimensiuni, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, s-a ajuns, un secol mai târziu, la provocările spațiului virtual, unde accesul la dimensiuni superioare este determinat de capacitățile noastre intelectuale și de intensitatea trăirilor noastre (ne-am călăuzit în acest itinerar și de ideile lui **Ron Atkin**, *The multidimensional man*, Penguin Books, 1981). Remarcabilă ni se pare ideea că ne naștem cu reprezentări non-euclidiene și numai ulterior ajungem la reprezentarea euclidiană a lumii.”⁴

Biologia este și ea influențată de existența geometriei neeuclidiene prin implicarea geometriei hiperbolice în domeniul „bio-computing”. Maurice Margenstern (profesor emerit al Universității din Lorraine, Franța) investighează automatele celulare folosind geometria

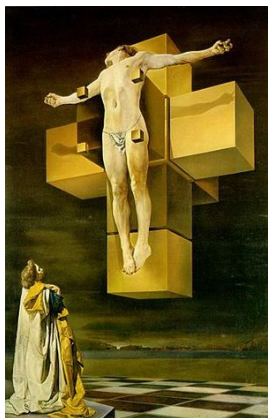
⁴ Solomon Marcus, *Paradigme universale*, Ediție integrală, Pitești, Editura Paralela 45, 2011, pag. 793

hiperbolică, unde un automat celular reprezintă un set de celule care sunt distribuite uniform în spațiu, conectate la nivel local și care își actualizează propria stare după aceeași regulă.

În muzica atonală a lui **Arnold Schönberg** (1874-1951) se remarcă prezența celei de-a patra dimensiuni din geometria neeuclidiană, prin existența intervalelor disonante și renunțarea la armonia clasică a sunetelor.

A patra dimensiune devine fascinantă pentru tot mai mulți oameni de știință, filozofi, artiști și capătă diferite nuanțe în funcție de domeniul de studiu al fiecăruia. Astfel, pentru pictori, ea devine un refugiu din această lume, este o metaforă pentru eliberarea din convențiile perspectivei liniare, pentru filozofi reprezintă realitatea fizică la care avem acces limitat, iar pentru matematicieni a patra dimensiune nu este decât un spațiu abstract definit în sistem ortogonal cu patru axe de coordonate.

În pictură, cea de a patra dimensiune a fost surprinsă în lucrările pictorului spaniol **Salvador Dali** (1904-1989) care a folosit ca obiect geometric greu de imaginat pentru mintea umană, hipercubul, pe care l-a răstignit pe Hristos. Acest hipercub reprezentat spațial este format din 8 cuburi așa cum cubul, la rândul lui în geometria în spațiu, este format din șase pătrate, după cum arată manualele de matematică.



Crucifixion (Corpus Hypercubus) -1954



Sacrament of the Last Supper -1955

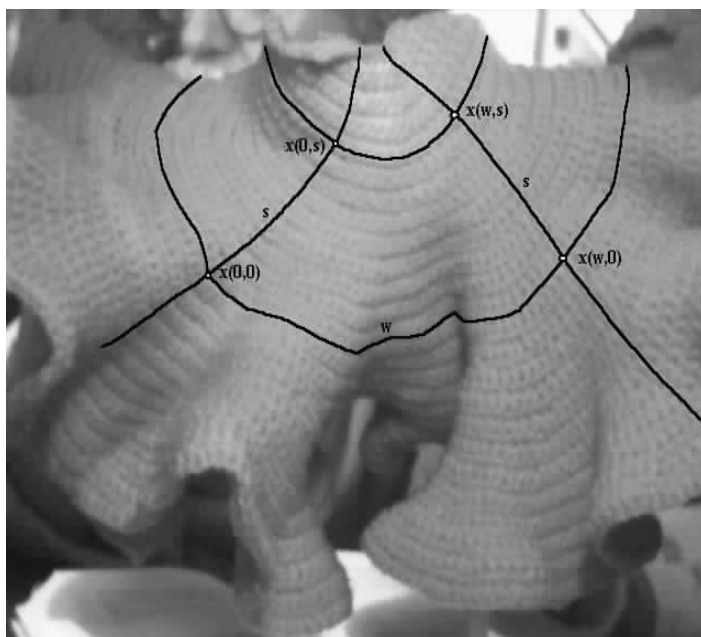
Atracția pentru geometrie și figuri spațiale (dodecaedrul din tabloul „Sacrament of the Last Supper”) este un mod natural de viață pentru Salvador Dali, care a surprins în lucrările sale lumi paralele și n-dimensionale, oameni, obiecte și animale cu însușiri diferite, ceasuri care se topesc și amintesc de atomii din fizica nucleară, realități deformate și iluzorii.

Alt domeniu atins, de data aceasta manual, de geometria neeuclidiană este croșetatul.

Tiparele de croșetat au o structură de bază matematică și au fost folosite pentru a ilustra forme din geometria hiperbolică, dificil de reprodus utilizând alte mijloace sau greu de înțeles atunci când sunt vizualizate în spațiul bidimensional.



Există studii matematice efectuate de cercetători americani de la Universitatea Cornell, Ithaca, NY, despre croșetarea în spațiul hiperbolic utilizând o croșetă și fire care nu-și modifică forma în urma efectuării de cusături. Exemplele de mai sus reprezintă modele de croșetat în spații hiperbolice.



Coordonatele geodezice rectangulare pe plan hiperbolic inelar

Geometria neeuclidiană, apărută inițial ca un fenomen paradoxal, s-a dovedit a face parte din însăși natura umană și împreună cu geometria euclidiană formează o realitate complexă și greu de evitat. Dacă unii matematicieni susțin ideea descoperirii acestor geometrii, alți cercetători sunt de părere că acestea nu sunt decât niște invenții ale omului, menite să-i ocupe timpul.

Și totuși cred că aceste geometrii sunt destul de interesante pentru tânărul de astăzi care își poate forma o cultură și o educație matematică cu ajutorul căreia să-și poată exprima păreri în domeniul matematicii. Rămâne numai ca timpul, pasiunea, dedicația și voința să facă diferența.

Bibliografie:

1. Mario Livio , *Este Dumnezeu matematician?*, București, Editura Humanitas, 2012
2. Courant R., Robbins H., *Ce este matematica?*, București, Editura Științifică, 1969
3. Solomon Marcus, *Răni deschise*, București, Editura Spandugino, 2012
4. Solomon Marcus, *Paradigme universale*, Ediție integrală, Pitești, Editura Paralela 45, 2011

Prof. Ana-Maria Nucă
Liceul Tehnologic Agricol „Nicolae Cornățeanu” Tulcea