Sugestii de adaptare didactică a unui model matematic al răspândirii infecțiilor cu COVID-19 și alte boli asemănătoare

Motto: "În contextual revoluției tehnologice actuale, accesul la informație nu mai e condiționat de costul tehnologiei, ci de costul învățării și utilizării acesteia" [6]

Articolul de față nu se ocupă de acest model din punct de vedere medical, atrage doar atenția strict asupra aplicațiilor matematicii în cercetarea interdisciplinară. Nu e decât un exercițiu de metodică, explicând didactic ce a scris autorul articolului online [5] și stimulând propunerea și rezolvarea de exemple și căutarea de căi adaptate diferențiat de rezolvare a problemelor aplicative, captivante. Cum ar fi creând o aplicație care indică boli după simptome / analize medicale și propune tratament, la capitolele de Calcul tabelar și Programarea bazelor de date. **Un algoritm, adică un model matematic, e necesar pentru rezolvarea oricărei probleme de informatică**, de exemplu ecuații pe cât posibil rezolvate.

Soluția și interpretarea ei, elaborate în cadrul unor proiecte, aparține autorului articolulului și se poate vedea în [5], la care doar voi adăuga completări și adaptări metodice. Tot aici se consemnează că modelul a fost verificat cu succes, (cu parametri stabiliți "experimental" pentru fiecare situație). Putem să-l facem accesibil, ba chiar s-ar putea îmbunătăți algoritmul, chiar și cu materia de școală, prin descoperire dirijată [4]. Se pot demonstra și explica rezolvările, ideile și calculele pe înțelesul elevilor prin "metoda pașilor mărunți" și, în restrânsul spațiu avut la dispoziție, (5 pag.), propun dezvoltarea lor didactică. Se justifică astfel, din necesități practice, introducerea conceptului de primitivă (antiderivată) [1].

Rezumat:

Se stabilește modelul propagării infectării cu noi tipuri de viruși luând în considerare viteza de creștere și constanta de inhibiție a creșterii." (*se valorifică modelul lui Pierre Verhulst*, *1838, n. n*.). Fără nicio intervenție, COVID-19 își dublează numărul în 2-3 zile, ceea ce sugerează că numărul infecțiilor în funcție de timpul t ar fi de forma $N(t) = a^t$ (exponențial) cu $a \in (2; 3)$. Dar, acolo unde oamenii au respectat normele de protecție, viteza de răspândire a fost mai mică și numărul infecțiilor e de sute de ori mai mic.

Autorul precizează că există 2 tipuri de modele ale dinamicii epidemiilor: modelul determinist și cel stohastic, utilizate și în multe alte domenii aplicative, ambele studiate și unele rezolvate de sute de ani de cercetători în matematică și din alte domenii. De modele din ce în ce mai precise depind aplicațiile software, de exemplu de prevedere a vremii. Ne vom opri la primul.

2.1. Ipoteza modelului

Numărul cazurilor de infecție e o funcție de timp, notată cu $N(t)$ (N: $[t_0, \infty) \rightarrow R$). Când apare un nou virus, oamenilor le lipsește înțelegerea originii și a căilor de transmitere, ceea ce duce la prevenție și control insuficiente. De aceea, la început, când N este aproape de zero, viteza (rata) de creștere a infecțiilor $N'(t)$ poate fi considerată direct proporțională cu $N(t)$, ecuația (2).

Dar când numărul de infecții atinge un anumit nivel, oamenii acordă atenție sporită epidemiei și iau măsuri. În acest moment, pentru accesibilitate, viteza de creștere a populației infectate scade odată cu creșterea numărului de oameni infectați *N(t)*.

Exercițiul XI. 1. Presupunând că funcția a : $[0; +\infty)\rightarrow R$ este derivabilă într-un punct $Nmax$ (numărul maxim de cazuri de infectați) cât este viteza de creștere a acesteia $a'(N\max)$ când N este $N\max$?

Exercițiul VII. 2. Fie $Nmax$ un număr real. Se poate determina o funcție liniară $a(N)$ din condițiile $a(0) = r_0$ și $a(Nmax) = 0$?

2.2. Modelare matematică a cazurilor de infectare

Presupunând că numărul de persoane infectate la momentul t_0 este N_0, se obține ca ipoteză a cercetării o ecuație diferențială de forma (cu $0 < N(t) < Nmax$):

$$\begin{cases} N'(t)=r_0\left(1-\dfrac{N(t)}{N\,max}\right)N(t) \\ N(t_0)=N_o \end{cases} \qquad (1)$$

Fie aproximarea problemei (1) pentru $N^2(t)$ mic (în faza incipientă):

$$\begin{cases} N'(t)=r_0 N(t), \\ N(t_0)=N_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Exercițiul XI. 3. Studiați semnul funcției $N'(t)$ după începerea epidemiei în (2) și în (1). Care este monotonia funcției N în raport cu t? Demonstrați că atunci când numărul de infecții N se apropie de numărul maxim $Nmax$, viteza N' cu care crește N scade către 0. Cât va fi N în punctul t_1 în care creșterea vitezei N' este maximă și de la care viteza de creștere începe să coboare? Cum se numește un astfel de punct?

Exercițiul IX. 4. Demonstrați că funcția a: $R\rightarrow R$, $a(N) = (\alpha - N)N$ unde $\alpha \in R$, își atinge maximumul în $\frac{\alpha}{2}$, adică $N' \leq \frac{Nmax}{2}$.

Exercițiul XI. 5. Să se arate că funcția $N : R \rightarrow R$, $N(t) = ce^{kt}$, unde $c, k \in R$, verifică ecuația:

$N'(t) = k\,N(t)$ (3).

Problema XI. 6. Găsiți toate funcțiile $N : R \to R$ derivabile care verifică ecuația (3).

Indicație: Metoda I. Considerând $H(t) = N(t)\cdot e^{-kt}$, unde funcția N este o soluție oarecare generală a ecuației (3) și derivând-o obținem că $H'(t) = 0 \Leftrightarrow H(t) = C \Leftrightarrow N(t) = c\cdot e^{kt}$.

Metoda II (constructivă). Cazul 1) $N(t) \neq 0\ \forall\ t \in R$. Găsim o primitivă $F(t)$ a funcției $\frac{N'(t)}{N(t)}$ = ln |N(t)|, care va trebui să fie de forma kt+C și rezolvăm ecuația, $|N(t)|=c'e^{kt} \Leftrightarrow N(t)= ce^{kt}$ cu $c\neq 0$;

Cazul 2) $\exists\ t_0 \in R\ N(t_0) = 0$.   *Temă de pregătire pentru olimpiadă*: să se demonstreze că $\forall\ t \in R\ N(t) = 0 = ce^{kt}$ cu c = 0.

Exercițiul XI. 7. Găsiți toate funcțiile N care verifică condițiile (2).

Indicație: Obținem $N(t) = N_0\cdot e^{r0(t-t0)}$ (4).

Problema XII. 8 Să se afle funcția derivabilă $N : [t_0, \infty) \to (0, Nmax)$ care satisfice condițiile (1):

Răspuns: $$N(t) = \frac{N\,max}{1+\left(\frac{N\,max}{N0}-1\right)e^{-r0(t-t0)}} \qquad (5)$$ Se poate vedea [3].

Problema XII. 9, pe care o propun *pentru pregătire pentru olimpiadă*. Soluția s-ar imbunatati astfel: **să se demonstreze (generalizare a algoritmului nenumeric)** că (***Teorema 1*****):** metoda se extinde analog, pentru problema ecuațiilor cu variabile separabile: fie I și J intervale deschise ale dreptei reale R și funcțiile continue $f : I \to R$ și $g : J \to R$, $g(x) \neq 0\ \forall\ x \in J$. Atunci pentru orice $t_0 \in I$ și orice $N_0 \in J$ $\exists$ un interval deschis I_1 care conține punctul t_0 , $I_1 \subset I$ și o funcție derivabilă $N : I_1 \to J$, care verifică egalitatea $N'(t) = f(t)\cdot g(N(t))$, $t \in I_1$ și care satisface condiția inițială $N(t_0) = N_0$.

Problema XII. 10 pentru olimpici. Generalizați Teorema 1, la cazul când $\exists N \in J$, $g(N) = 0$.

Atunci când nu se poate exprima soluția printr-o funcție explicită, funcția soluție N se poate aproxima prin algoritmi numerici, studiați și demonstrați și aceștia matematic, de la caz la caz.

Problema 11. Să se studieze, în contextul dat de aplicare, la nivel de clasele V-VIII, respectiv la liceu, conform cu programele școlare, proprietățile expresiei / funcției:

$f(x) = \frac{a}{1+be^{-x}} = \frac{ae^x}{e^x+b}$, unde $a = N_{max} > 0$, $b > 0$ și $e > 0$, mai întâi pe exemple particulare simple, cum ar fi alegând aleatoriu $a = 3$ și $b = 2 \Leftrightarrow g : R \setminus \{-2\}$, $g(t) = \frac{3t}{t+2}$, $t \neq -2$.

Dacă notăm e^x cu t, vom avea un raport de funcții liniare de forma:

$g(t) = \frac{at}{t+b}$, unde $t \neq -b$. “Scoatem întregii din fracție”: $g(t) = \frac{at+ab-ab}{t+b} = a - \frac{ab}{t+b}$ deci gaficul se reduce la o hiperbolă, mult aplicată în fizică, chimie, biologie etc.

Se pot rezolva ecuații și inecuații cu aceste expresii și se poate face graficul pe o mulțime discretă etc. Se poate calcula printr-o ecuație momentul t la care se atinge un număr dat de infectări. La sisteme de ecuații se pot determina coeficienții a și b astfel încât funcția să ia valori concrete date, similar ca în cercetarea reală, rezolvând un sistem de ecuații cu fracții.

Idei de utilizare pedagogică creativă a rezultatelor cercetării științifice găsim și în [1], [2], [4].

Problema XI.12. Studiați funcția $f: R \to R$, $f(x) = \frac{a}{1+be^{-x}} = \frac{ae^x}{e^x+b}$, cu $b > 0$.

Indicație: cu substituția de la gimnaziu $e^\wedge x = t > 0$ avem

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $f(0) = \frac{a}{b+1} = N_0$ și $\lim_{x \to \infty} f(x) = a = N_{max}$, deci graficul funcției f tinde asimptotic spre dreapta $y = a$, sub care se situează. Studiați derivatele funcțiilor g pe $(0; \infty) \to R$ și $f: R \to R$ de mai sus, și punctul de inflexiune.

Metodă de calcul sau de verificare. Cu aceeași substituție $t = e^x$, cu regula de derivare a compunerii de funcții și algoritmul direct eficient din [2], avem pentru $t \neq -b$:

$$f'(x) = \left(\frac{ae^x+0}{e^x+b}\right)'(x) = g'(t(x)) \cdot t'(x) = ¿\begin{matrix} a & 0 \\ 1 & b \end{matrix} \vee \frac{¿}{¿¿} ¿e^x = \frac{(ab-1\cdot 0)e^x}{¿¿} = \frac{abe^x}{¿¿}; \qquad f''(x) = \frac{abe^x(b-e^x)}{¿¿}.$$

Concluzii (interpretarea soluției în limbaj natural)

Trebuie respectate cu strictețe regulile medicale de specialitate de izolare, dezinfecție și tratament prescrise astfel încât răspândirea infecției $N(t)$ să fie minimă. Cum doar la limită (în viitor, “la sfârșitul timpului”) funcția soluție f tinde să devină constantă, în rest e exponențială, deci mă feresc să trag concluzii altele decât sugestia de a face matematica și informatica prietenoase, interesante și utile.

Astfel putem face analiza avizată pe calculator a datelor experimentale (în cazul unui sistem determinist), domeniu interdisciplinar căutat pe piața muncii.

Bibliografie:

[1] Catană Aurelia, Săcuiu Mihaela, Stănășilă Octavian, *Metodica predării analizei matematice*, E. D. P., 1983

[2] Colcer Laurian, *Noi și eficiente formule cu funcții raționale descoperite cu computerul. Sugestii didactice*, Gazeta Matematică seria A, *SSMR*, Nr. 2 / 2002

[3] Holhoş Adrian, *Curs de Matematici speciale*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2018

[4] Ionescu Clara, *Metodica predării informaticii*, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 2001

[5] Kaihao Liang, *Mathematical model of infection kinetics and its analysis for COVID-19, SARS and MERS*, Infect Genet Evol., publicat online pe 8 Aprilie 2020 https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7141629/

[6] Pribeanu Constantin, *Interacțiune om-calculator*, E. D. P., București

Profesor Colcer Laurian

Liceul Teoretic ”Ion Creangă” Tulcea